NTIN071 A&G: Cvičení 11 – Úvod do výpočetní složitosti

Cíle výuky: Po absolvování student umí

- uvést formální definice tříd $\mathtt{TIME}(f(n))$ a $\mathtt{SPACE}(f(n))$
- definovat složitostní třídy $\mathtt{P}$, $\mathtt{NP}$ (jak na základě verifikátoru, tak NTM), co-$\mathtt{NP}$
- definovat polynomiální redukci, $\mathtt{NP}$-těžkost a $\mathtt{NP}$-úplnost
- zkonstruovat polynomiální redukci mezi problémy
- určit, zda jsou třídy složitosti uzavřené na různé operace

Příklady na cvičení

Příklad 1. Ukažte, že problémy CLIQUE, INDEPENDENT-SET a VERTEX-COVER, definované níže, jsou na sebe navzájem polynomiálně redukovatelné.

CLIQUE

In: Graf $G = (V, E)$ a celé číslo $k \geq 0$.
Q: Obsahuje G (jako podgraf) úplný podgraf na alespoň k vrcholech?

INDEPENDENT-SET

In: Graf $G = (V, E)$ a celé číslo $k \geq 0$.
Q: Obsahuje G nezávislou množinu alespoň k vrcholů, tj. množinu $S \subseteq V$, $|S| \geq k$, kde žádné dva vrcholy nejsou spojeny hranou?

VERTEX-COVER

In: Graf $G = (V, E)$ a celé číslo $k \geq 0$.
Q: Obsahuje G vrcholové pokrytí velikosti nejvýše k, tj. množinu $S \subseteq V$, $|S| \leq k$, která má alespoň jeden vrchol z každé hrany?

Příklad 2. Použijte známý fakt, že HAMILTONIAN-CYCLE je $\mathtt{NP}$-úplný, a ukažte, že ORIENTED-HAMILTONIAN-CYCLE, (s,t)-HAMILTONIAN-PATH a HAMILTONIAN-PATH jsou také $\mathtt{NP}$-úplné.

HAMILTONIAN-CYCLE

In: Neorientovaný graf $G = (V, E)$.
Q: Obsahuje G Hamiltonovskou kružnici, tj. kružnici obsahující každý vrchol?

ORIENTED-HAMILTONIAN-CYCLE

In: Orientovaný graf $G = (V, E)$.
Q: Obsahuje G orientovanou Hamiltonovskou kružnici, tj. orientovanou kružnici obsahující každý vrchol?

(s,t)-HAMILTONIAN-PATH
IN: Neorientovaný graf $G = (V, E)$ a dvojice vrcholů $s, t \in V$.   Q: Obsahuje G Hamiltonovskou cestu z s do t, tj. cestu, která začíná v s, končí v t a prochází každý vrchol právě jednou?

HAMILTONIAN-PATH
IN: Neorientovaný graf $G = (V, E)$.   Q: Obsahuje G Hamiltonovskou cestu, tj. cestu, která prochází každý vrchol právě jednou?

Příklad 3. Ukažte, že třída `P` je uzavřená na sjednocení, průnik a doplněk.

Příklad 4. Ukažte, že třída `NP` je uzavřená na sjednocení a průnik.

K procvičení a k zamyšlení

Příklad 5. Ukažte, že VERTEX-COVER má polynomiální redukci na DOMINATING-SET.

DOMINATING-SET
IN: Graf $G = (V, E)$ a celé číslo $k \geq 0$.   Q: Obsahuje G množinu vrcholů $S \subseteq V$ o velikosti nejvýše k takovou, že každý vrchol $v \in V \setminus S$ má souseda v S?

Příklad 6. Sestrojte polynomiální redukci HAMILTONIAN-CYCLE na TRAVELING-SALESPERSON.

TRAVELING-SALESPERSON
IN: Množina měst $C = \{c_1, \dots, c_n\}$, vzdálenosti $d(c_i, c_j) \in \mathbb{N}$ mezi každou dvojicí měst a číslo $D \in \mathbb{N}$.   Q: Existuje cesta délky nejvýše D, která navštíví každé město právě jednou a vrátí se do výchozího města?

Příklad 7. Ukažte, že HAMILTONIAN-CYCLE je polynomiálně redukovatelný na SAT.

Příklad 8. Ukažte, že GRAPH-COLORING je NP-úplný.

GRAPH-COLORING
IN: Graf $G = (V, E)$ a číslo $k \in \mathbb{N}$.   Q: Lze obarvit vrcholy grafu G nejvýše k barvami tak, aby žádná hrana nespojovala dva vrcholy stejné barvy?

Příklad 9. Ukažte, že třída `P` je uzavřená na iteraci. To znamená, že pokud $L \in$ `P`, pak také L^* patří do `P`. (Nápověda: Navrhněte dynamický program vyplňující tabulku, kde $T[i, j] = 1$ právě tehdy, když $a_i \dots a_j \in L^*$.)