

NTIN071 A&G: CVIČENÍ 2 – PUMPING LEMMA, MYHILL-NERODEOVA VĚTA,
EKVIVALENTNÍ A MINIMÁLNÍ REPREZENTACE

Cíle výuky: Po absolvování student umí

- formulovat a dokázat Pumping lemma pro regulární jazyky
- použít Pumping Lemma k důkazu neregularity daného jazyka
- formulovat a dokázat Myhill-Nerodeovu větu
- použít Myhill-Nerodeovu větu k důkazu regularity, ke konstrukci DFA
- použít Myhill-Nerodeovu větu k důkazu neregularity
- definovat dosažitelné stavy, ekvivalenci stavů, redukovaný automat, homomorfismus automatů
- aplikovat algoritmy pro dosažitelné stavy a ekvivalenci stavů k redukci DFA

PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

Příklad 1 (Pumping Lemma: formulace). (a) Zformulujte Pumping Lemma pro regulární jazyky (bez nahlížení do poznámek z přednášky).

(b) Jak souvisí n z lemmatu s automatem rozpoznávajícím daný jazyk?

(c) Dokažte je (bez nahlížení do poznámek z přednášky).

(d) Demonstrujte pumpování na jazyce $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ obsahuje } abba \text{ jako podslovo}\}$.

Příklad 2 (Pumping Lemma: aplikace). Dokažte pomocí Pumping Lemmatu, že následující jazyky nejsou regulární. (Jazyky jsou nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$.)

(a) $L = \{a^i b^j \mid i \geq j\}$

(b) $L = \{a^{i^2} \mid i \geq 0\}$

(c) $L = \{a^i b^{i+j} a^j \mid i, j \geq 0\}$

(d) $L = \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$, kde w^R je w napsané pozpátku

Příklad 3 (Myhill–Nerodeova věta: formulace). (a) Zformuluje Myhill–Nerodeovu větu a připomeňte si myšlenku důkazu (bez nahlížení do poznámek z přednášky).

(b) Ukažte, že když zapomeneme libovolnou z podmínek na ekvivalenci $\sim$, výsledné tvrzení neplatí.

Příklad 4 (Myhill–Nerodeova věta: aplikace). Pomocí Myhill–Nerodeovy věty dokažte nebo vyvráťte, že je jazyk regulární.

(a) $L = \{aa, ab, ba\}$

(b) $L = \{a^i b^j \mid i \geq j\}$

(c) $L = \{a^{i^2} \mid i \geq 0\}$

(d) $L = \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$, kde w^R je w napsané pozpátku

(e) $L = \{a^i b^{i+j} a^j \mid i, j \geq 0\}$

Příklad 5 (Ekvivalentní a minimální reprezentace). Pro následující automaty:

- (a) Najděte a odstraňte nedosažitelné stavy.
 (b) Určete relaci ekvivalence (nerozlišitelnosti) stavů. (Navíc pro každou rozlišitelnou dvojici stavů najděte všechna nejkratší rozlišující slova.)
 (c) Zkonstruuje jejich redukty.

A	a	b	B	a	b	C	a	b	D	a	b
$\rightarrow * 0$	1	2	$\rightarrow * 0$	0	5	$\rightarrow 0$	1	2	$* 0$	7	6
1	3	0	1	1	3	1	1	3	1	1	0
2	4	5	2	2	7	$* 2$	2	4	2	4	3
3	0	2	3	3	2	3	1	6	3	3	1
4	2	5	$* 4$	6	1	$* 4$	5	2	4	2	3
5	0	3	5	5	1	$* 5$	5	5	5	5	4
			$* 6$	4	2	6	6	3	6	6	5
			7	7	0	7	1	2	$\rightarrow * 7$	0	6
						8	8	3			

K PROCVIČENÍ A K ZAMYŠLENÍ

Příklad 6. Dokažte pomocí Pumping Lemmatu, že následující jazyky nejsou regulární. (Jazyky jsou nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$.)

- (a) $L = \{a^i b^j \mid i \leq j\}$
 (b) $L = \{a^{2^i} \mid i \geq 0\}$
 (c) $L = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$

Příklad 7. Pomocí Myhill–Nerodeovy věty dokažte nebo vyvráťte, že je jazyk regulární.

- (a) $L = \{a^i b^j \mid i \leq j\}$
 (b) $L_k = \{a^i b^j \mid i \leq j \leq k\}$ pro pevně dané $k \in \mathbb{N}$
 (c) $L = \{a^{2^i} \mid i \geq 0\}$
 (d) $L = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$

Příklad 8 (Pumping Lemma: zobecnění). (a) Můžeme podmínku $|uv| \leq n$ v Pumping Lemmatu nahradit za $|vw| \leq n$, tedy *iterovat blízko konce*? Dokažte nebo vyvráťte.

- (b) Můžeme iterovat blízko předem zvoleného místa ve slově? Jak zformulovat (a dokázat) takové zesílení?

Příklad 9 (Ekvivalence na slovech). Uvedte příklad ekvivalence $\sim$ na Σ^* , která:

- (a) je pravá a levá kongruence
 (b) je pravá, ale ne levá kongruence
 (c) je konečného indexu