

NTIN071 A&G: Cvičení 4 – Uzavřenost na řetězcové operace

Cíle výuky: Po absolvování student umí

- formálně popsat konstrukci automatu na základě jiných automatů
- rozhodnout, zda jsou regulární jazyky uzavřené na různé řetězcové operace, včetně složitějších, a toto tvrzení dokázat nebo vyvrátit

Příklady na cvičení

Příklad 1 (Uzavřenost na řetězcové operace). Pro daný DFA A sestrojte automat, který rozpoznává daný jazyk. (Sestrojený automat formálně popište.)

(a) $L(A).L(A)$	<table><tr><td></td><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td>$\rightarrow 0$</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$* 1$</td><td>3</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>5</td><td>0</td><td>3</td></tr></table>		a	b	$\rightarrow 0$	1	2	$* 1$	3	0	2	4	5	3	0	2	4	2	5	5	0	3	<table><tr><td></td><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td>$\rightarrow 0$</td><td>0</td><td>5</td></tr><tr><td>$* 1$</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>$* 4$</td><td>6</td><td>1</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td><td>1</td></tr><tr><td>$* 6$</td><td>4</td><td>2</td></tr></table>		a	b	$\rightarrow 0$	0	5	$* 1$	1	3	2	2	5	3	3	2	$* 4$	6	1	5	5	1	$* 6$	4	2
	a	b																																													
$\rightarrow 0$	1	2																																													
$* 1$	3	0																																													
2	4	5																																													
3	0	2																																													
4	2	5																																													
5	0	3																																													
	a	b																																													
$\rightarrow 0$	0	5																																													
$* 1$	1	3																																													
2	2	5																																													
3	3	2																																													
$* 4$	6	1																																													
5	5	1																																													
$* 6$	4	2																																													
(b) $L(A)^+$																																															
(c) $L(A)^*$																																															
(d) $L(A)^R$																																															

Příklad 2 (Mazání). Mějme nějaký regulární jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$. Popište následující jazyky v množinovém zápisu. Rozhodněte, zda jsou (nutně) také regulární, dokažte nebo vyvrátte. Jazyk sestávající ze všech slov vzniklých ze slov jazyka $L \dots$

- ...smazáním všech výskytů písmene a .
- ...smazáním počátečního písmene a zapsáním tohoto písmene na konec slova.
- ...smazáním nejdelší souvislé posloupnosti a ček ze začátku slova.

K procvičení a k zamyšlení

Příklad 3 (Prefixy). Jsou regulární jazyky uzavřené na následující operace? Dokažte nebo vyvrátte. (V následujícím je L regulární jazyk nad abecedou Σ .)

- $\text{init}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \text{existuje } u \in \Sigma^* \text{ takové, že } wu \in L\}$
- $\text{min}(L) = \{w \in L \mid \text{neexistují } u \in L, v \in \Sigma^+ \text{ takové, že } w = uv\}$
- $\text{max}(L) = \{w \in L \mid \text{neexistuje } u \in \Sigma^+ \text{ takové, že } wu \in L\}$

Příklad 4 (Posun). Pro daný regulární jazyk L nad abecedou Σ definujme jazyk L' následovně. Je jazyk L' nutně také regulární?

$$L' = \{uv \mid u, v \in \Sigma^*, vu \in L\}$$

Příklad 5 (Řez). Mějme dva regulární jazyky L, M a definujme jazyk K následovně. Je jazyk K nutně také regulární?

$$K = \{uw \mid u, w \in \Sigma^*, (\exists v \in M) uvw \in L\}$$

Příklad 6 (Iterace unárních jazyků). Ukažte, že pro libovolný jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{a\}$ je jazyk L^* regulární.