

NTIN071 A&G: CVIČENÍ 7 – PUMPING LEMMA PRO BEZKONTEXTOVÉ JAZYKY,
CHOMSKÉHO NORMÁLNÍ FORMA

Cíle výuky: Po absolvování student umí

- uvést formální znění Pumping lemmatu pro bezkontextové jazyky
- použít Pumping Lemma k důkazu, že daný jazyk není bezkontextový
- uvést formální definici Chomského normální formy a souvisejících pojmů
- vysvětlit důkaz Pumping lemmatu pro bezkontextové jazyky
- převést danou bezkontextovou gramatiku do Chomského normální formy
- vysvětlit algoritmus CYK, aplikovat jej na dané slovo a bezkontextovou gramatiku

PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

Příklad 1 (Pumping lemma: formulace a důkaz). (a) Zformulujte Pumping lemma pro bezkontextové jazyky (bez nahlížení do poznámek).

(b) Srovnajte formulaci s verzí pro regulární jazyky.

(c) Vysvětlete myšlenku důkazu.

(d) Demonstrujte pumpování na jazyce $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Příklad 2 (Pumping lemma: aplikace). Rozhodněte, zda jsou následující jazyky bezkontextové. Dokažte správnost vaší odpovědi.

(a) $L = \{0^i1^i \mid i \geq 0\}$

(e) $L = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$

(b) $L = \{0^i1^j0^i \mid 0 \leq j \leq i\}$

(f) $L = \{1^{n^2} \mid n \geq 0\}$

(c) $L = \{0^i1^i2^i \mid i \geq 0\}$

(g) $L = \{1^p \mid p \text{ je prvočíslo}\}$

(d) $L = \{0^{2i}1^{3i}0^i \mid i \geq 0\}$

(h) $L = \{0^i1^j \mid 0 \leq i \leq j^2\}$

Příklad 3 (Převod do ChNF). Následující bezkontextovou gramatiku převeďte do Chomského normální formy:

(a) $G_1 = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, S, \mathcal{P})$, kde

(b) $G_2 = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, S, \mathcal{P})$, kde

$$\mathcal{P} = \{S \rightarrow 0AB,$$

$$A \rightarrow 0A0 \mid 11,$$

$$B \rightarrow 0\}$$

$$\mathcal{P} = \{S \rightarrow 0A10B10,$$

$$A \rightarrow 1A0 \mid \epsilon,$$

$$B \rightarrow 1B00 \mid \epsilon\}$$

Příklad 4 (Algoritmus CYK). Pomocí algoritmu CYK určete, zda $w \in L(G)$.

(a) $w = 001100$, $G = G_1$ je gramatika z Příkladu 3(a)

(b) $w = 110011$, $G = G_1$ je gramatika z Příkladu 3(a)

K PROCVIČENÍ A K ZAMYŠLENÍ

Příklad 5 (Pumping lemma: aplikace). Rozhodněte, zda jsou následující jazyky bezkontextové. Dokažte správnost vaší odpovědi.

- (a) $L = \{0^i 1^j 0^i \mid i, j \geq 0\}$ (d) $L = \{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}$
 (b) $L = \{0^i 1^j 0^i \mid 0 \leq i \leq j\}$ (e) $L = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*, |w|_0 = |w|_1\}$
 (c) $L = \{0^i 1^j 2^k \mid 0 \leq i \leq j \leq k\}$ (f) $L = \{1^{n^2+n+1} \mid n \geq 0\}$

Příklad 6 (Pumpování a pravé lineární gramatiky). Uveďte alternativní důkaz Pumping lemmatu pro regulární jazyky, který je založený na derivacích z pravé lineární gramatiky.

Příklad 7 (Pumpování lineárních jazyků). Připomeňme, že gramatika je *lineární*, pokud obsahuje pouze pravidla tvaru $A \rightarrow uBw$ a $A \rightarrow w$, kde $A, B \in V$ a $u, w \in T^*$.

- (a) Zformulujte Pumping lemma pro lineární jazyky.
 (b) Dokažte toto tvrzení pomocí odvození (redukovanou) lineární gramatikou.
 (c) Jak souvisí n z tvrzení s lineární gramatikou pro daný jazyk?
 (d) Ukažte, že jazyk $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1\}$ není lineární.
 (e) Zařadte jazyk L do Chomského hierarchie.

Příklad 8 (O převodu do ChNF). Odpovězte na následující otázky, odpověď zdůvodněte.

- (a) Najděte příklad gramatiky, ve které je nějaký generující neterminál dosažitelný pouze přes negenerující neterminály.
 (b) Které neterminály je při redukci třeba odstranit dříve, negenerující nebo nedosažitelné?
 (c) Může se odstraněním nedosažitelných neterminálů z nějakého dosažitelného generujícího neterminálu stát negenerující?
 (d) Chceme-li rozdělit produkční pravidlo s dlouhým tělem, jaký je minimální počet pravidel v Chomského normální formě, která musíme vytvořit?

Příklad 9 (Převod do ChNF). Převeďte následující bezkontextové gramatiky do Chomského normální formy:

- (a) $G = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, S, \mathcal{P})$ (b) $G = (\{S, E, F\}, \{(\cdot), *, +, , 1\}, S, \mathcal{P})$
 $\mathcal{P} = \{S \rightarrow A \mid 0SA \mid \epsilon,$ $\mathcal{P} = \{S \rightarrow (E),$
 $A \rightarrow 1A \mid 1 \mid B1,$ $E \rightarrow F + F \mid F * F,$
 $B \rightarrow 0B \mid 0 \mid \epsilon\}$ $F \rightarrow S \mid 1\}$

Příklad 10 (Algoritmus CYK). Pomocí algoritmu CYK určete, zda $w \in L(G)$.

- (a) $w = 01010010$, $G = G_2$ je gramatika z Příkladu 3(b)
 (b) $w = 01010011$, $G = G_2$ je gramatika z Příkladu 3(b)